Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XII-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2017
CLASA a X-a

Subiectul 1.

Arătați că pentru orice $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ au loc inegalitățile

$$\frac{3}{4} < \sqrt[n]{\frac{1+3^n}{1+4^n}} < \frac{3}{4} \cdot \sqrt[n]{\frac{4}{3}}$$

Subiectul 2.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\sqrt[3]{26x-25} + \sqrt[3]{x^2-29x+27} = \sqrt[3]{x^2-3x-25} + 3.$$

Subiectul 3.

Fie $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu $|\omega| \neq 1$. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = z + \omega \cdot \bar{z}$ este inversabilă, iar apoi determinați inversa ei.

Subiectul 4.

a) Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ afixele punctelor A, respectiv B. Arătați că triunghiul OAB este echilateral dacă și numai dacă $2z_2 = z_1(1 \pm i\sqrt{3})$, unde punctul O este originea axelor.

b) Arătați că dacă punctele $O(0,0)$, $A(a,b)$ și $B(c,d)$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral, atunci

$$3ac = 2b^2 - 5bd + 2d^2.$$

Notă:

1) Timp de lucru 3 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XII-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2017
BAREM DE CORECTARE CLASA A X-A

Subiectul 1.

Arătați că pentru orice $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ au loc inegalitățile

$$\frac{3}{4} < \sqrt[n]{\frac{1+3^n}{1+4^n}} < \frac{3}{4} \cdot \sqrt[n]{\frac{4}{3}}$$

Soluție:

Fie $1 < a < 1 + a \leq b$. Prin ridicare la puterea n, inegalitatea devine

$$\frac{3^n}{4^n} < \frac{1+3^n}{1+4^n} < \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}. \qquad \text{(1p)}$$

$\frac{3^n}{4^n} < \frac{1+3^n}{1+4^n}$ revine la inegalitatea adevărată $3^n < 4^n$, $n \geq 2$ (2p)

Pentru $\frac{1+3^n}{1+4^n} < \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}$, avem (3p)

$$\frac{1+3^n}{1+4^n} < \frac{1+3^n}{4^n} < \frac{3^{n-1}+3^n}{4^n} < \frac{3^{n-1}(1+3)}{4^n} \leq \frac{3^{n-1}\cdot 4}{4^n} = \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}$$

Finalizare (1p)

Subiectul 2.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\sqrt[3]{26x-25} + \sqrt[3]{x^2-29x+27} = \sqrt[3]{x^2-3x-25} + 3$$

Soluție:

Folosind notațiile $a = \sqrt[3]{26x-25}$, $b = \sqrt[3]{x^2-29x+27}$, $c = \sqrt[3]{x^2-3x-25}$, ecuația revine la

$$\begin{cases} a+b=c+3 \\ a^3+b^3=c^3+3^3 \end{cases} \Leftrightarrow (a+b)(ab-3c)=0 \qquad \text{(1p)}$$

Dacă $a+b=c+3=0$, atunci ecuația $\sqrt[3]{x^2-3x-25}+3=0$
este echivalentă cu $x^2-3x+2=0$ și admite soluțiile $x_1=1$, $x_2=2$. (1p)

Dacă $ab-3c=0 \Leftrightarrow ab=3c$, atunci $a+b=c+3$, deci a, b sunt soluțiile ecuației

$$t^2-(c+3)t+3c=0,$$

care admite soluțiile $t_1=c$, $t_2=3$.
Considerăm că $a=3$ și $b=c$, deci

$$\begin{cases} \sqrt[3]{26x-25}=3 \\ \sqrt[3]{x^2-29x+27}=\sqrt[3]{x^2-3x-25} \end{cases} \Rightarrow x=2. \qquad \text{(2p)}$$

Considerăm că $a=c$ și $b=3$, deci

$$\begin{cases} \sqrt[3]{26x-25}=\sqrt[3]{x^2-3x-25} \\ \sqrt[3]{x^2-29x+27}=3 \end{cases} \Rightarrow x \in \{0,29\}. \qquad \text{(2p)}$$

Soluția ecuației
$x \in \{0,1,2,29\}$ (1p)

Subiectul 3.

Fie $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu $|\omega| \neq 1$. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = z + \omega \cdot \bar{z}$ este inversabilă, iar apoi determinați inversa ei.

Soluție:

injectivitatea

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $f(z_1) = f(z_2)$. Atunci $z_1 + \omega\overline{z_1} = z_2 + \omega\overline{z_2}$, ceea ce revine la

$$z_1 - z_2 + \omega(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = 0$$

Se deduce

$$\overline{z_1} - \overline{z_2} + \overline{\omega}(z_1 - z_2) = 0 \Leftrightarrow \overline{z_1} - \overline{z_2} = -\overline{\omega}(z_1 - z_2)$$

Atunci, egalitatea $f(z_1) = f(z_2)$ este echivalentă cu $(1 - |\omega|^2)(z_1 - z_2) = 0$, care implică $z_1 = z_2$.
Deci funcția f este injectivă. **(3p)**

surjectivitatea

Fie $u \in \mathbb{C}$ pentru care $f(z) = u$. Atunci $z + \omega\,\bar{z} = u$, cum $\bar{z} + \bar{\omega}z = \bar{u}$, se obține

$$z = \frac{u - \omega\bar{u}}{1 - |\omega|^2} \in \mathbb{C}.$$

Deci funcția f este surjectivă. **(3p)**
În concluzie, funcția f este bijectivă, deci inversabilă.
Fie $f^{-1}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ inversa funcției f. Atunci **(1p)**

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{1 - |\omega|^2}(z - \omega\bar{z}).$$

Subiectul 4.

a) Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ afixele punctelor A, respectiv B. Arătați că triunghiul OAB este echilateral dacă și numai dacă $2z_2 = z_1(1 \pm i\sqrt{3})$, unde punctul O este originea axelor.

b) Arătați că dacă punctele $O(0,0)$, $A(a,b)$ și $B(c,d)$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral, atunci

$$3ac = 2b^2 - 5bd + 2d^2.$$

Soluție:

a)

Dacă ΔOAB este echilateral, atunci $[OA] \equiv [OB] \equiv [AB]$, ceea ce revine la $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$. **(1p)**

Avem $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$, deci $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right| = 1$ de unde rezultă $|z_1| = |z_2|$. **(1p)**

Cum $z_2 = z_1\left(\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$, se obține $|z_1 - z_2| = \left|z_1\left(-\frac{1}{2} \mp \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right| = |z_1| = |z_2|$ **(1p)**

b) Considerăm afixele punctelor $A(a,b)$ și $B(c,d)$ ca fiind $z_1 = a + bi$ și $z_2 = c + di$.

ΔOAB este echilateral implică $z_1\left(\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = z_2$.

Dacă $z_1\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = z_2$, atunci

$$(a + bi)\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = c + di$$

ceea ce revine la

$$\begin{cases} a - b\sqrt{3} = 2c \\ a\sqrt{3} + b = 2d \end{cases}$$ **(1p)**

Se obține $a = \frac{2d - b}{\sqrt{3}}$ și $c = \frac{d - 2b}{\sqrt{3}}$, deci

$$3ac = 2b^2 - 5bd + 2d^2.$$ **(1p)**

Dacă $z_1\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = z_2$, atunci

$$(a+bi)\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = c + di$$

ceea ce revine la

$$\begin{cases} a + b\sqrt{3} = 2c \\ a\sqrt{3} - b = -2d \end{cases}$$ **(1p)**

Se obține $a = \frac{-2d+b}{\sqrt{3}}$ și $c = \frac{-d+2b}{\sqrt{3}}$, deci

$$3ac = 2b^2 - 5bd + 2d^2.$$ **(1p)**

COLEGIUL NATIONAL VASILE LUCACIU
Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro